数列的周期性研究

作者：王方策、肖杨、金良善

指导老师：张启津

一、摘要

本文主要研究各类周期数列的周期性及其条件。全文以不动点方法、特征根方法为工具，以复数（n 次单位根）、矩阵为载体，来诠释其周期性。

二、正文

周期数列因其优美的周期性常常受到高考和竞赛的青睐。话不多说，让我们一起走近各类周期数列。

定义 1：对于数列｛a_n｝若存在T∈N*,使得任意正整数n＞N,都有$a_{T+n}=a_n$,则称数列｛a_n｝为从第N项起的周期数列，T为它的一个周期。（为方便起见，下文中的T均指最小正周期）

㈠来看第一种数列：

定理 1：｛a_n｝满足 $a_n=2\cos\theta\cdot a_{n-1}-a_{n-2}$ ① 其特征方程为 $x^2=2\cos\theta\cdot x-1$，若该方程的两共轭虚根 z，z_1恰为 T 次单位根（即$[x-(\cos\theta+\sin\theta i)][x-(\cos\theta-\sin\theta i)]=0$），则数列｛$a_n$｝以 T 为周期。

证明： 引理 1：线性递归数列满足$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}$ ❶，且其特征方程$x^2=px+q$ ❷有两不等根z、z_1，则a_n可唯一表示为$a_n=A\cdot z^n+B\cdot z_1^n$ (A ,B为待定系数)。

简证：由❶与韦达定理知 $a_{n+1}-za_n=z_1(a_n+za_{n-1})=\cdots=z_1^n(a_1-za_0)$ ❸；同理有 $a_{n+1}-z_1a_n=z^n(a_1-z_1a_0)$ ❹

这样，由❸-❹即得

$a_n=(a_1-za_0)z_1^{\ n}/(z_1-z)-(a_1-z_1a_0)z^n/(z_1-z)$

又∵a_1、a_0、z_1、z 为常数　∴引理 1 证毕

由引理 1 得 $a_n=Az^n+Bz_1^{\ n}$ ② (A ,B 为待定系数)

又∵z，z_1恰为 T 次单位根，（即 $z^T=z_1^{\ T}=1$），

结合②式可知

$a_{n+T}=Az^nz^T+Bz_1^{\ n}z_1^{\ T}=Az^n+Bz_1^{\ n}=a_n$

故 a_n 是以 T 为周期的数列。

推论 1：对周期为 T 的上述数列 a_n 满足$\sum_{i=n+1}^{n+T} a_i=0$

证明如下：先看

引理 2：对 n 次单位根 λ 有（λ ≠1）：$\lambda^n=1$，则 $\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i=0$

简证：∵ λ ≠1，$\lambda^T=1$ ∴$\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i=\frac{1-\lambda^T}{1-\lambda}=0$，证毕。

于是$\sum_{i=n+1}^{n+T} a_i=A\cdot\sum_{i=n+1}^{n+T} z^i+B\cdot\sum_{i=n+1}^{n+T} z_1^{\ i}=0$，∴证毕

反过来看，若数列 a_n 满足$\sum_{i=n+1}^{n+T} a_i=0$（1），必有 a_n 是以 T 为周期的数列。

简证：由(1)得$\sum_{i=n}^{n+T-1} a_i=0$（2），(1)−(2)即得 $a_{n+T}=a_n$.

反思：上述过程以复数为载体，以 n 次单位根的周期性来诠释数列的周期，其中结合了常用的特征根方法，有效地解决了这一类周期性问题。

㈡下面看一个数列组｛a_n｝，｛b_n｝ 它们满足如下条件，$a_n=a\cdot a_{n-1}+b\cdot b_{n-1}$ ③ 且 $b_n=c\cdot a_{n-1}+d\cdot b_{n-1}$ ④（其中 a=d= cos θ， b= -sin θ， d= sin θ ），我们来探求其存在周期性的条件。

思路 1：对于③④，可考虑消去 b_n，即可得到 $a_n=(a+d)\cdot a_{n-1}-(ad-bc)a_{n-2}$，即 $a_n=2\cos\theta\cdot a_{n-1}-a_{n-2}$ 马上回到了上面㈠的问题。

这里采取思路 2：若把③④看做一个对点（a_n，b_n）的变换，则它的系数对应着逆时针转 θ 的二阶矩阵 A。

定义 2：对矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，若存在数 λ 及<u>非零</u>向量 ξ $=(x,y)$，使得 $A\xi=\lambda\xi$，则称 λ、ξ 分别为矩阵A的特征值、特征向量

引理 3：对矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，有特征值 λ_1， λ_2为方程 $\lambda^2-(a+d)\cdot\lambda+(ad-bc)=0$ 的两根（此处虚根也视为有特征值）。

简证：∵ $A\xi=\lambda\xi$ ∴ $\begin{cases}(\lambda-a)x-by=0\\ cx+(\lambda-d)y=0\end{cases}$ ❺

又∵ ξ 为非零向量(即❺式有非零解)

∴ $\begin{vmatrix}\lambda-a & b\\ c & \lambda-d\end{vmatrix}=0$，等价于方程 $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$

∴引理 2 证毕。

引理4：若λ_1，λ_2为A的两个*不同*的特征值，ξ_1，ξ_2分别是属于特征值λ_1，λ_2的特征向量，对于任意的非零向量α，设$\alpha=t_1\xi_1+t_2\xi_2$（$t_1,t_2\in R$），则对任意$n\in N+$，有$A^n\alpha=t_1\lambda_1^n\xi_1+t_2\lambda_2^n\xi_2$ ❶

简证：反复使用$A\xi=\lambda\xi$，可得$A^n\xi=\lambda^n\xi$

$\therefore A^n\alpha=t_1A^T\xi_1+t_2A^n\xi_2=t_1\lambda_1^n\xi_1+t_2\lambda_2^n\xi_2$

∴引理 3 证毕。

转回本题：$\because a=d=\cos\theta$，$b=-\sin\theta$，$d=\sin\theta$，$\therefore\lambda_1$，λ_2为$x^2-2\cos\theta\cdot x+1=0$的两根。这时，若$\lambda_1$，$\lambda_2$为T次单位根，即$\lambda_1^T=\lambda_2^T=1$ 再由两引理处理③④，令$\alpha=(a_k, b_k)=t_1\xi_1+t_2\xi_2$，立刻有

$(a_{T+k}, b_{T+k})=A^T\alpha=t_1\lambda_1^T\xi_1+t_2\lambda_2^T\xi_2=\alpha=(a_k, b_k)$

$\therefore a_{T+k}=a_k$，$b_{T+k}=b_k$ （即a_n, b_n均为以T为周期的数列）。

反思：既然这是一种旋转变换，那么从几何角度来看也很直观。例如，$\theta=60°$，那么只需变换6次即可会到原处，这样易知T=6。

㈢关于 $a_n=\dfrac{a*a_{n-1}+b}{c*a_{n-1}+d}$ 的周期性问题探讨（$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq0$，$bd\neq0$）

定义 3：对f(x)，若满足f(x)=x，则称x为f(x)的不动点。

引理 5：（不动点方法）数列a_n $a_n=f(a_{n-1})=\frac{a*a_{n-1}+b}{c*a_{n-1}+d}$,若

f(x)的不动点为m, n（m≠n），那么可构造数列$\frac{a_n-m}{a_n-n}$为

等比数列；当m=n时，可构造$\frac{1}{a_n-m}$为等差数列。

回到原题：由引理 4 得 x=$\frac{aX+b}{cX+d}$；整理得 cx^2+(d-a)x-b=0 设两根为 m、n，q=$\frac{a-cm}{a-cn}$

a_n-m=$\frac{(a_{n-1}-m)(a-cm)}{c*a_{n-1}+d}$，故$\frac{a_n-m}{a_n-n}=\frac{(a_{n-1}-m)(a-cm)}{(a_{n-1}-n)(a-cn)}$

①△=0 α=β 则$\frac{1}{a_n-m}$为等差数列，易知无周期性。

②△<0 由韦达定理 mn=-$\frac{b}{c}$ m+n=$\frac{a-d}{c}$ m 与 n 是共轭复数

故 a-cm 与 a-cn 也共轭

设 a-cm=r(cosθ+isinθ)

则 a-cn=r(cosθ-isinθ)

q=$\frac{a-cm}{a-cn}=\frac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r(\cos\theta-i\sin\theta)}$=cos$2\theta$+isin$2\theta$

故|q|=1，且仅当$\frac{2\pi}{\arg(q)}=\frac{r}{s}(r,s)=1$（即$\frac{2\pi}{\arg(q)}$为有理数）时

则a_n有周期 T=$\frac{2\pi s}{\arg(q)}$

③△>0 当且仅当 q=-1 时，周期 T=2

即 a-cm=cn-a ，即$\frac{2a}{c}=m+n=\frac{a-d}{c}$，即 d=-a

数列$a_n=\frac{a*a_{n-1}+b}{c*a_{n-1}+d}$的周期性便是如上 3 种情况。

小结：以上过程依旧是以复数为载体，并通过一定方法求出通项公式加以说明。当然我们也可再次使用矩阵。这里不妨再次对㈢加以说明：分两步——

㈣ Ⅰ.视a_n=对应系数矩阵为$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，先证明

命题 1：a_{n+m-1}对应 A^m.　采用数学归纳法，有

①当 m=1 时，由条件知成立

②假设当 m=k 时（k∈N*），命题 1 成立，

即 $a_{n+k-1}=\frac{a_k a_n+b_k}{c_k a_n+d_k}$ 与 $A^k=\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ 对应

则当 m=k+1 时，$a_{n+k}=\frac{a\frac{a_k a_n+b_k}{c_k a_n+d_k}+b}{c\frac{a_k a_n+b_k}{c_k a_n+d_k}+d}=\frac{(aa_k+bc_k)a_n+ab_k+bd_k}{(ca_k+dc_k)a_n+cb_k+dd_k}$

又 $A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa_k+bc_k & ab_k+bd_k \\ ca_k+dc_k & cb_k+dd_k \end{pmatrix}$ 与 a_{n+k} 的系数对应，∴成立　∴综合①②，命题 1 得证。

Ⅱ.现在只需证明存在数 T 使 A^T 为数量矩阵$\begin{pmatrix} a^T & 0 \\ 0 & a^T \end{pmatrix}$，

同㈡有 $A^T\xi=\lambda^T\xi$，$\lambda^2-(a+d)\cdot\lambda+(ad-bc)=0$（其中λ、ξ分别为矩阵 A 的特征值、特征向量），

此时当$\lambda=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，且$\theta=2\pi/T$，有$\lambda^T=r^T$。

则对于任意的非零向量α，设α$=t_1\xi_1+t_2\xi_2(t_1,t_2\in R)$，则有$A^T\alpha=t_1\lambda_1^T\xi_1+t_2\lambda_2^T\xi_2=t_1a^T\xi_1+t_2\lambda_2a^T\xi_2=a^T\alpha$（即任意的非零向量α经矩阵 A 变换 T 次后，所得$a^T\alpha$与α共线

由定义知，A^T即为数量矩阵。

于是，当$\lambda=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，且$\theta=2\pi/T$时，

$$a_{n+T}=\frac{a^T a_n+0}{0\times a_n+a^T}=a_n$$ ∴a_n是以 T 为周期的周期数列。

(五)下面我们又把 $a_n=\frac{a*a_{n-1}+b}{c*a_{n-1}+d}$ 拓展为 $a_n=\frac{ea_{n-1}^2+aa_{n-1}+b}{ca_{n-1}+d}$

为求通项，我们构造 $a_n-k=\frac{e(a_{n-1}-k)^2}{ca_{n-1}+d}$ ②

展开②，并比较①②系数，得　　联立③④,

$$\begin{cases} e=e \\ a=kc-2ek & ③ \\ b=k^2+kd & ④ \end{cases}$$

则有k为$(e-c)k^2+(a-d)k+b=0$ *的根,

即k恰为数列①的不动点,设另一根为j,则

$$\begin{cases} e=e \\ a=jc-2ej & ⑤ \\ b=j^2+jd & ⑥ \end{cases}$$

为使方程*有两不同的虚根，必须$k-j\neq0$

而由③-⑤知，（k−j）(c−2e)=0 ∴c=2e

又$\Delta_*=\Delta_{④}=(kc+d)^2$ 须令其＜0 ∴k, j共轭

再由$a_n-j=e(a_{n-1}-j)^2/(ca_{n-1}+d)$ ⑦， ②÷⑦有

$$(a_n-k)/(a_n-j)=[(a_{n-1}-k)/(a_{n-1}-j)]^2=[(a_1-k)/(a_1-j)]^{2^{n-1}}$$

为方便说明，现引入定义4和引理6。

定义4：设整数列｛a_n｝，且a_n(mod m）∈[0，m−1]，我们称｛a_n(mod m）｝为｛a_n｝的模数列。同样的，若｛a_n(mod m）｝为周期数列，则称｛a_n｝为模周期数列

引理 6：$a_n=2^{n-1}$为模周期数列。

证明：$a_n=2^{n-1}$，$b_n\equiv a_n\pmod{m}$ (m 为奇数)（m 为偶数时只需提出2^k 变为奇数即可，这里不加以讨论。）

讨论$\{b_n\}$数列的周期性

存在性质：若∃l_1、l_2，满足$b_{l_1}=b_{l_1+l_2}$，则有$\forall k$满足$b_k=b_{k+l_2}$,即l_2为$\{b_n\}$的周期

1） 当 m=$2^k+1(k\in N^+)$时，有$\{b_n\}$周期 T=2k

证明如下：$a_n=2^{n-1}=(2^k)^{\frac{n-1}{k}}=(2^k+1-1)^{\frac{n-1}{k}}$。 当$k|(n-1)$时，

$$a_n=C_{\frac{n-1}{k}}^{0}(2^k+1)^{\frac{n-1}{k}}+C_{\frac{n-1}{k}}^{1}(2^k+1)^{\frac{n-1}{k}-1}(-1)^1+\cdots\cdots+C_{\frac{n-1}{k}}^{\frac{n-1}{k}}(2^k+1)^0(-1)^{\frac{n-1}{k}}$$

所以可设：a_n=（2^k+1）A+$(-1)^{\frac{n-1}{k}}$

当$\frac{n-1}{k}$为偶数时，即 n-1=2rk($r\in N^+$)时，有$b_n=b_{2rk+1}$=1

因为 r 的任意性，所以根据已知性质可得：$\{b_n\}$周期 T=2k。

2）当 m=2^k-1($k\in N^+$)时，有$\{b_n\}$周期 T=k

证明如下：$a_n=2^{n-1}=(2^k)^{\frac{n-1}{k}}=(2^k-1+1)^{\frac{n-1}{k}}$。当 $k|(n-1)$ 时，

$$a_n=C_{\frac{n-1}{k}}^{0}(2^k-1)^{\frac{n-1}{k}}+C_{\frac{n-1}{k}}^{1}(2^k-1)^{\frac{n-1}{k}-1}(1)^1+\ldots\ldots+C_{\frac{n-1}{k}}^{\frac{n-1}{k}}(2^k-1)^0(1)^{\frac{n-1}{k}}$$

所以可设：$a_n=$（2^k-1）B+$(1)^{\frac{n-1}{k}}$

因为$k|(n-1)$，所以可得 n-1=rk($r\in N^+$)，所以$b_n=b_{rk+1}$=1

因为 r 的任意性，所以根据已知性质可得：$\{b_n\}$周期 T=k。

3)（猜想）当 m 不是以上两类的奇数时，$\{b_n\}$存在周期 T=m-1

（本人才疏学浅无法证明，此结论由大量数据总结得出，大概无误）

回到原题：

令$q_n=(a_n-k)/(a_n-j)$，又∵a_1-k与a_1-j共轭

若$q_1=(a_1-k)/(a_1-j)$是m次单位根（m∈N+且m＞1）（即 $q^m=1$，q≠1）

又∵数列$b_n\equiv 2^{n-1}$ (mod m)为周期数列 ，

$2^{n-1}=mk_n+b_n$（k_n∈N*）　　∴$q_n=q_1^{2^{n-1}}=q_1^{mk_n+b_n}=q_1^{b_n}$

q_n也为周期数列，又∵a_n与q_n一一对应

∴a_n也为周期数列，周期性与b_n一致。

总结：㈠、㈡和㈢、㈣其实是对同一数列的不同角度的分析，揭示了存在周期性的本源；而拓展㈤则是借用了模周期来体现周期性。由于能力有

限，本文例举的都是简单情形，一些特征方程为高次的并未涉及讨论。

三、问题呈现

这一块主要是呈现研究过程中遇到的无力解决的问题或猜想，也在这里和大家分享。

问题1：㈢中提到若有周期，则相应的$\frac{2\pi s}{\arg(q)}$必须满足$\frac{2\pi}{\arg(q)}=\frac{r}{s}$，$(r,s)=1$（即$\frac{2\pi}{\arg(q)}$为有理数）才行。

其一，那若为无理数呢？如θ＝$\arg(q)$=（$\sqrt{2}$/2）π

其二，是否任意二次方程$ax^2+bx+c=0$的虚根q_1、q_2，均满足$\frac{2\pi}{\arg(q)}$为有理数。

问题2：㈣中同样用了矩阵，可就是不直观。能否像㈡一样找到直观的几何解释？

猜想1：类比推论1，我们猜想㈢中的数列$a_n=\frac{a*a_{n-1}+b}{c*a_{n-1}+d}$，对周期为T的上述数列$a_n$满足类似关系$\prod_{i=n+1}^{n+T} a_i$=1.

猜想2:注意到特征根方法得出的特征方程与矩阵方法所得的特征方程如出一辙，故猜想两者存在某种内在联系。

猜想3：见引理6的(3)

四、感谢

感谢丘先生及组委会提供的这次机会，我们因此能够对周期数列这一领域有进一步的研究，感受到数学的优美形式，同时也丰富了自己的阅历，受益匪浅。

参考文献：

1. 《周期函数与周期数列》 李世杰

2. 《矩阵与变换》——数学选修4-2

3. 《奥赛经典》 叶军